

На правах рукописи

Драц Андрей Владимирович

**Математические модели и методы повышения
эффективности и надежности реализации
динамических структур данных**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Соколов Андрей Владимирович

Официальные оппоненты: **Кривулин Николай Кимович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
профессор кафедры статистического моделирования математико-механического факультета

Кузьмин Олег Викторович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет»,
заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики Института математики, экономики и информатики

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится 24 декабря 2015 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 на базе ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет» по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Петрозаводского государственного университета и на сайте <http://www.petrso.ru>.

Автореферат разослан «__» _____ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.190.03, к. т. н.

Воронов Роман Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время стремительно развивается индустрия производства программного и аппаратного обеспечения для таких устройств, как мобильные телефоны, планшеты, персональные компьютеры, автоматизированные средства обработки данных и т.д. Как правило, эти устройства обладают достаточно жесткими ограничениями на быструю память, такую как регистры, кеш, оперативная память и т.п. Это связано с дороговизной производства и большим энергопотреблением (для мобильных устройств). В связи с этим необходимо уделять особое внимание алгоритмам управления памятью в этих устройствах и, прежде всего, работе с базовыми структурами данных, такими как LIFO-стеки, FIFO-очереди и приоритетные очереди. Например, алгоритмы работы с очередями, необходимые при разработке встроенных операционных систем, управляющих потоками пакетов в Internet, таких, например, как Cisco IOS, где требования на время обработки пакетов маршрутизатором очень жесткие. Механизм страничной виртуальной памяти здесь не используется и вся работа происходит в нескольких пулах оперативной памяти. FIFO-очереди и приоритетные очереди используются в компьютерных сетях, операционных системах, графических системах, устройствах промышленной автоматики. Ряд американских фирм выпускает микросхемы, реализующие работу с несколькими FIFO-очередями. Например, известна реализация устройств FIFO-памяти в виде микросхем, выпускаемых американской фирмой IDT Inc. (аналогичную продукцию выпускают ее конкуренты - фирмы Cypress и AverLogic Technologies). В семействах памяти Multi-Queue FIFOs реализована работа с несколькими параллельными FIFO-очередями на одном кристалле. Число очередей и длина каждой очереди устанавливается программным путем на этапе инициализации устройства.

Целью работы является построение и анализ математических моделей различных способов представления динамических структур данных: LIFO-стеков, FIFO-очередей и приоритетных очередей. Критериями оптимальности являются максимальное среднее время работы до переполнения и минимальная доля потерянных элементов при работе на бесконечном времени. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построить и проанализировать математические модели описывающие различные способы представления LIFO-стеков в памяти одного уровня.

2. Построить и проанализировать математические модели описывающие различные способы представления FIFO-очереди в памяти одного уровня.
3. Построить и проанализировать математические модели описывающие различные способы представления приоритетной очереди в памяти одного уровня.
4. Разработать комплекс программ, реализующие предложенные модели и алгоритмы.

Методы исследования: аппарат случайных блужданий, теория поглощающих и регулярных цепей Маркова, методы математического анализа и комбинаторики.

Научная новизна. Все предложенные в работе модели и алгоритмы являются новыми. Предложенные ранее модели описывали способы работы описывали процесс работы с конкретным число стеков, очередей или приоритетов у приоритетной очереди или строили имитационную модель. Предложенные в работе модели и алгоритмы позволяют решить поставленные задачи для произвольного количества стеков, очередей или приоритетов в приоритетной очереди.

Теоретическая и практическая значимость Предложенные в работе модели и методы могут быть использованы при проектировании программных и аппаратных комплексов использующих динамические структуры данных.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построение и анализ математических моделей, описывающих различные способы представления LIFO-стеков в памяти одного уровня.
2. Построение и анализ математических моделей, описывающих различные способы представления FIFO-очереди в памяти одного уровня.
3. Построение и анализ математических моделей, описывающих различные способы представления FIFO-очереди в памяти одного уровня при работе на бесконечном времени.
4. Построение и анализ математических моделей, описывающих различные способы представления приоритетной очереди в памяти одного уровня.
5. Комплекс программ, реализующих предложенные в работе алгоритмы и модели.

Связь работы с научными программами, темами. Основные результаты диссертации были получены в рамках исследования, выполнявшихся в ходе работы над госбюджетными темами Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00330-а, 12-01-00253-а, 15-01-03404-а и программой стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях:

1. VII Международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике», 1–6 июня 2008, Петрозаводск.
2. XVI Всероссийская научно-методическая конференция «Телематика-2009», 22–25 июня 2009, Санкт-Петербург.
3. Третья Всероссийская научная конференция «Методы и средства обработки информации», 6–8 октября 2009, Москва.
4. Международная научно-техническая конференция «Многопроцессорные вычислительные и управляющие системы», 28 сентября – 3 октября 2009, с. Дивноморское.
5. Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения», 19-22 октября 2009, Минск.
6. Annual International Workshop on Advances in Methods of Information and Communication Technology, 25–26 мая 2010, Петрозаводск.
7. Международная суперкомпьютерная конференция «Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи», 20–25 сентября 2010, Новороссийск.
8. Международная научно-техническая конференция «Суперкомпьютерные технологии: разработка, программирование, применение. СКТ-2010», 27 сентября – 2 октября 2010, с. Дивноморское.
9. Седьмая международная научная молодежная школа «Высокопроизводительные вычислительные системы ВПВС-2010», 27 сентября – 2 октября 2010, с. Дивноморское.
10. 15 Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов», 11–17 сентября 2011, Петрозаводск.

11. 5 Всероссийская конференция «Имитационное моделирование. Теория и практика», 19–21 октября 2011, Санкт-Петербург.
12. Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics, 15–18 сентября 2014, Петрозаводск.
13. 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 22–28 сентября 2014, Родос.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был значительным. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях, 5 из которых опубликованы в научных изданиях, рекомендованных ВАК, 12 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации 106 страниц текста с 29 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 65 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассмотрена задача управления LIFO-стеками в памяти одного уровня. Предложены и исследованы математические модели, описывающие процесс работы с LIFO-стеками.

Рассмотрен процесс работы с n стеками в памяти размера m . В стеках хранятся данные фиксированного размера. На каждом шаге дискретного времени возможна одна из следующих операций со стеками:

- Включение в i -тый стек с вероятностью p_i ,
- Исключение из i -того стека с вероятностью q_i ,
- Чтение элемента в одном из стеков (без изменения длины) с вероятностью r .

$p_1 + \dots + p_n + q_1 + \dots + q_n + r = 1$. Необходимо определить какой из способов представления стеков является оптимальным. Рассмотрены последовательный, связанный и страничный способы представления. В качестве критерия оптимальности рассмотрено максимальное среднее время работы до переполнения памяти T .

В **первом параграфе** исследуется последовательное представление стеков. Пусть для определенности число стеков четно. Память необходимо разделить на $n/2$ частей. Каждой паре стеков необходимо выделить свою область памяти и направить стеки вершинами навстречу друг другу. k_i – размер памяти выделенный под i -тую пару стеков 1. В качестве математической модели

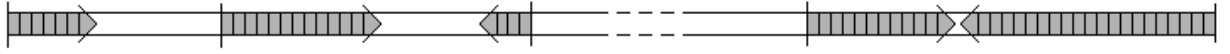


Рис. 1: Последовательное представление стеков.

рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной решетке ограниченной условиями $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ и $x_{2j-1} + x_{2j} \leq k_j$, $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, где x_1, \dots, x_n – текущие размеры стеков. Отражающие экраны: $x_i = -1$. Поглощающие экраны: $x_{2j-1} + x_{2j} = k_j + 1$

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Количество состояний:

$$\frac{1}{2^{n/2}} \prod_{i=1}^{n/2} (k_i + 1)(k_i + 2)$$

Для построения матрицы Q предложена функция для вычисления номера состояния по размеру стеков.

Теорема 1.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{(k_{n/2+1})(k_{n/2+2})}{2} \dots \frac{(k_1+1)(k_1+2)}{2} (x_2(k_1 + \frac{3-x_2}{2}) + x_1) + \right. \\ \left. x_4(k_2 + \frac{3-x_4}{2}) + x_3) \dots \right) + x_n(k_{n/2} + \frac{3-x_n}{2}) + x_{n-1}$$

Для вычисления среднего времени работы со стеками необходимо вычислить фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$. Для вычисления среднего времени работы со стеками необходимо просуммировать элементы матрицы N соответствующие начальному состоянию $(0, \dots, 0)$. Всего возможно $\frac{(m-1)!}{(m-\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!}$ способов разбиения памяти между стеками. Для

вычисления оптимального способа разбиения необходимо вычислить время работы для каждого из способов представления. Предложены эвристические алгоритмы сокращения перебора.

Во **втором параграфе** исследуется связанное представление стеков. В этом случае стек представлен в виде связанного списка. Каждый элемент в списке состоит из двух частей: информационной части и указателя на предыдущий элемент стека 2. l – отношение размера указателя к размеру



Рис. 2: Связанное представление стеков.

информационной части. $M = \lfloor m/(1+l) \rfloor$ – максимальное число элементов стеков в памяти. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной пирамиде с ребрами $0 \leq x_i \leq n$ и основанием $x_1 + \dots + x_n = M$. Отражающие экраны: $x_i = -1$. Поглощающий экран: $x_1 + \dots + x_n = M + 1$.

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные.

Теорема 2. *Количество состояний равно $\frac{(M+n)!}{M!n!}$.*

Для построения матрицы Q предложена функция для вычисления номера состояния по размеру стеков.

Теорема 3.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \binom{M - w_j + j}{j} - \binom{M - w_j + j - x_j}{j}$$

где $w_j = x_{j+1} + \dots + x_n$.

В **третьем параграфе** исследуется страничное представление стеков. В этом случае стек хранится в виде связанного списка страниц. Страница состоит из k ячеек памяти и указателя на предыдущую страницу 3. Если один из стеков занял страницу, то остальные не могут ее использовать. $N = \left\lfloor \frac{m}{k+l} \right\rfloor$ – максимальное число страниц. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной решетке ограниченной



Рис. 3: Страничное представление стеков.

условиями

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{x_i}{k} \right\rceil \leq N \\ x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Отражающие экраны: $x_i = -1$, $1 \leq i \leq n$. Поглощающий экран: $\sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{x_i}{k} \right\rceil = N + 1$

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные.

Теорема 4. *Количество состояний равно*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{N}{i} k^i$$

Для построения матрицы Q предложена функция для вычисления номера состояния по размеру стеков.

Теорема 5.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{x_i} \sum_{l=0}^{i-1} \binom{i-1}{l} \binom{N - N_i - \left\lceil \frac{j-1}{k} \right\rceil}{l} k^l$$

$$gde \ N_i = \left\lceil \frac{x_{i+1}}{k} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{x_n}{k} \right\rceil$$

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q и вычисляют среднее время работы T для рассмотренных видов представлений. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

Во второй главе рассмотрена задача оптимального управления FIFO-очередями в памяти одного уровня. В задаче рассмотрены n FIFO-очереди расположенных в памяти размера m . Время дискретно и заданы вероятностные характеристики очередей p_i , q_i , r , $1 \leq i \leq n$. В качестве критерия оптимальности рассмотрено максимальное среднее время работы T до

переполнения памяти. Рассмотрены последовательный и связанный способы представления очередей. Для двух очередей рассмотрено также представление когда очереди движутся друг за другом по кругу.

В **первом параграфе** рассмотрено последовательное представление очередей. В этом случае необходимо разбить память на n частей и каждой очереди выделить свою часть памяти k_i – размер памяти выделенный i -той очереди 4. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по це-

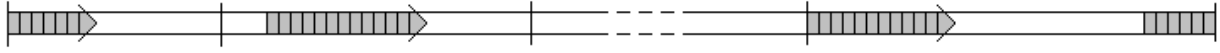


Рис. 4: Последовательное представление очередей.

лочисленному n -мерному параллелепипеду ограниченному условиями $x_i = 0$ и $x_i = k_i$. Отражающие экраны: $x_i = -1$. Поглощающие экраны: $x_i = k_i + 1$, $1 \leq i \leq n$.

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Количество состояний равно $\prod_{i=1}^n (k_i + 1)$.

Теорема 6. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_n(k_{n-1}(\dots(k_3(k_2x_1 + x_2) + x_3) + \dots + x_{n-1}) + x_n$

Всего возможно $\frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}$ способов разбиения памяти между очередями. Для вычисления оптимального способа разбиения необходимо вычислить время работы для каждого из способов представления. Предложены эвристические алгоритмы сокращения перебора.

Во **втором параграфе** рассмотрено представление очередей в виде движения друг за другом по кругу. В этом случае очереди находятся в одной области памяти. Переполнение наступает когда голова одной из очередей догоняет хвост другой. Если одна из очередей пустая, то при включении элемента необходимо помещать очередь в середину свободной памяти. x_1 и x_2 – текущие длины очередей, z – расстояние от головы первой очереди до хвоста второй 5. В качестве математической модели рассмотрено блуждание по целочисленной трехмерной пирамиде ограниченной условиями $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $z \geq 0$, $x_1 + x_2 + z \leq m$. Отражающие экраны: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$. Поглощающие экраны: $z = -1$, $x_1 + x_2 + z = m + 1$. Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы

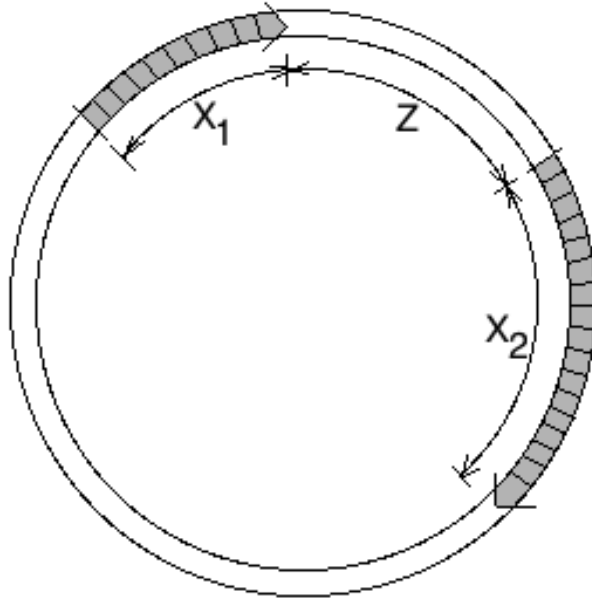


Рис. 5: Движение двух очередей по кругу.

Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q и вычисляют среднее время работы T для рассмотренных видов представлений. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В третьей главе рассмотрена задача оптимального управления FIFO-очередями в памяти одного уровня при работе на бесконечном времени. В задаче рассмотрены n FIFO-очереди расположенных в памяти размера m . Время дискретно и заданы вероятностные характеристики очередей $p_i, q_i, r, 1 \leq i \leq n$.

Переполнение не является аварийной ситуацией. В случае невозможности включения элементов в очередь, они отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память (т. е. до исключения элемента). Такое поведение очереди называется «сбросом хвоста». В качестве критерия оптимальности рассмотрена минимальная доля времени P^* , которую очереди проводят в состоянии «сброса хвоста». Рассмотрены последовательный и связанный способы представления очередей. Для двух очередей также рассмотрен способ представления в виде движения друг за другом по кругу.

В **первом параграфе** рассмотрено последовательное представление очередей. Пусть x_1, \dots, x_n – текущие длины очередей, k_1, \dots, k_n – фиксированное разбиение памяти. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной решетке ограниченной условиями: $0 \leq x_i \leq k_i + 1, 1 \leq i \leq n$. Отражающие экраны: $x_i = -1, 1 \leq i \leq n$. Состоя-

ния «сброса хвоста»: $x_i = k_1 + 1$, $1 \leq i \leq n$. Для решения задачи построена однородная регулярная цепь Маркова.

Теорема 7. Пусть $p_i \neq q_i$ при $1 \leq i \leq s$ и $p_i = q_i$ при $s + 1 \leq i \leq n$, тогда доля времени в состоянии «сброса хвоста» равна

$$P_c^* = \sum_{i=1}^s \frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k_i+1} - 1} + \sum_{i=s+1}^n \frac{p_i}{k_i + 1}$$

Для оптимального разбиения памяти доказана теорема:

Теорема 8. Пусть у всех очередей равны вероятности включения и исключения элементов $p_i = q_i$, $1 \leq i \leq n$, тогда

$$P_c^* \geq \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i^* + 1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{m+n} \sqrt{p_i} \sum_{l=1}^n \sqrt{p_l} \right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i} \right)^2}{m+n}$$

Для нахождения оптимального разбиения памяти предложен метод динамического программирования:

$$P_c^*(m) = \min_{k_1 + \dots + k_n = m} \sum_{i=1}^n p_i^*(k_i)$$

Где $P_c^*(m)$ – доля времени, проведенного процессом в состоянии «сброса хвоста» при размере памяти m при оптимальном разбиении памяти между очередями. p_i^* – доля времени, проведенная i -той очередью в состоянии «сброса хвоста». Рассмотрим рекуррентную формулу:

$$P_c^*(m) = P_c^*(m-1) - \max_{1 \leq i \leq n} (p_i^*(k_i) - p_i^*(k_i+1))$$

Начальное значение $P_c^*(0)$ равно:

$$P_c^*(0) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{0+1} - 1} = \sum_{i=1}^n p_i$$

Во **втором параграфе** рассмотрено связанное представление очередей. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной решетке ограниченной условиями: $x_i \geq 0$, $x_1 + \dots + x_n \leq M$. Отражающие экраны: $x_i = -1$, $1 \leq i \leq n$. Состояния «сброса хвоста»: $x_1 + \dots + x_n = M + 1$. Для решения задачи построена однородная регулярная цепь Маркова.

Теорема 9. Доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста» при связанном представлении при условиях $x_i \neq 1 \quad \forall i$ и $x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$ равна

$$P_l^* = (p_1 + \dots + p_n) \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{M+n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{M+n}}{(x_i - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} + \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)}}$$

Теорема 10. Доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста» при связанном представлении равна

$$P_l^* = \frac{(p_1 + \dots + p_n)}{k_0} \frac{\frac{\partial^{n-s-1}}{\partial^{k_0-1} x_0 \partial^{k_1-1} x_1 \dots \partial^{k_s-1} x_s} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{M+n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \right\}}{\frac{\partial^{n-s}}{\partial^{k_0} x_0 \partial^{k_1-1} x_1 \dots \partial^{k_s-1} x_s} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{M+n}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \right\}}$$

В диссертации проводится анализ эффективности и даны практические рекомендации по выбору лучшего из двух рассмотренных методов представления очередей в зависимости от значений параметров системы.

Во **втором параграфе** рассмотрено представление очередей в виде движения друг за другом по кругу. В качестве математической модели рассмотрено блуждание по целочисленной трехмерной пирамиде ограниченной условиями $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, z \geq 0, x_1 + x_2 + z \leq m$.

Отражающие экраны: $x_1 = -1, x_2 = -1$. Состояния «сброса хвоста»: $z = -1, x_1 + x_2 + z = m$. Для решения задачи построена однородная регулярная цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов. Для вычисления доли времени, проведенного в состояниях «сброса хвоста», необходимо решить уравнение $\alpha P = \alpha, \|\alpha\| = 1$ и просуммировать компоненты предельного вектора α , которые соответствуют состояниям «сброса хвоста». Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q и вычисляют среднее время работы работы P^* . В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В **третьем параграфе** рассмотрена система из n FIFO-очереди, находящаяся в памяти неограниченного размера. Время дискретно. На нечетном шаге в одну из очередей с вероятностью $1/n$ помещается элемент. На четном шаге из произвольной очереди исключается элемент с вероятностью $1/n$. $x(n, t)$ – средний размер очередей после t шагов. $P(n, t)$ – вероятность исключения элемента из пустой очереди на шаге t .

Теорема 11.
$$P(n, t) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(t-1)!}{(t-k-1)! [k/2]! [k/2]!} p^k r^{t-1-k}.$$

$$x(n, t) = \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{i!}{(i-k)! [k/2]! [k/2]!} p^{k+1} r^{i-k}.$$

В **четвертой главе** рассмотрена задача оптимального управления приоритетной очередью. В задаче рассмотрена очередь с n приоритетами в памяти одного уровня. Рассмотрено представления в виде массива и в виде n FIFO очередей. В качестве критериев оптимальности рассмотрены максимальное времени работы до переполнения и минимальная доля потерянных элементов при работе на бесконечном времени.

В **первом параграфе** в качестве критерия оптимальности рассмотрено максимальное среднее время работы до переполнения. В задаче рассмотрена приоритетная очередь с n приоритетами в памяти размера m . На каждом шаге дискретного времени возможна одна из следующих операций:

- Включение в очередь с i -тым приоритетом с вероятностью p_i ,
- Исключение из очереди элемента с наибольшим приоритетом с вероятностью q ,
- Доступ к элементу без исключения с вероятностью r .

В случае представления в виде массива в очередь вместе с информационной частью необходимо поместить значение приоритета. l – отношение размера приоритета к размеру информационной части. $M = \lfloor m/(1+l) \rfloor$ – максимальное число элементов, которые можно поместить в память. Ранее было показано:

$$T = \begin{cases} \frac{-M-1}{q-p} + \frac{q}{(q-p)^2} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{M+1} - 1 \right), & p \neq q \\ \frac{1}{2q} (M+1)(M+2), & p = q \end{cases}$$

где $p = p_1 + \dots + p_n$.

В случае представления в виде n FIFO-очередей в качестве математической

модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленному n -мерному параллелепипеду ограниченному условиями $x_i = 0$ и $x_i = k_i$. Отражающие экраны: $x_i = -1$. Поглощающие экраны: $x_i = k_i + 1$, $1 \leq i \leq n$. Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные.

Во **втором параграфе** в качестве критерия оптимальности рассмотрена минимальная доля времени в состоянии «сброса хвоста» при работе на бесконечном времени В случае представления в виде массива:

Теорема 12.

$$P^* = \begin{cases} \frac{q-p}{\left(\frac{q}{p}\right)^{M+1} - 1} & q \neq p \\ \frac{p}{M+1} & q = p \end{cases}$$

где $p = p_1 + \dots + p_n$.

В случае представления в виде n FIFO-очередей в качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной n -мерной решетке ограниченной условиями: $0 \leq x_i \leq k_i + 1$, $1 \leq i \leq n$. Отражающие экраны: $x_i = -1$, $1 \leq i \leq n$. Состояния «сброса хвоста»: $x_i = k_i + 1$, $1 \leq i \leq n$. Для решения задачи построена однородная регулярная цепь Маркова. Предложен алгоритм нумерации состояний и построения матрицы Q вероятностей переходов. Для вычисления доли времени, проведенного в состояниях «сброса хвоста», необходимо решить уравнение $\alpha P = \alpha$, $\|\alpha\| = 1$ и просуммировать компоненты предельного вектора α , которые соответствуют состояниям «сброса хвоста». Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q и вычисляют среднее время работы работы P^* . В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Предложены и исследованы математические модели, описывающие последовательный, связанный и страничный способы представления произвольного числа LIFO-стеков в памяти одного уровня. В качестве критерия оптимальности рассмотрено максимальное среднее время работы до переполнения.
2. Предложены и исследованы математические модели, описывающие последовательный, связанный способы представления произвольного числа

FIFO-очереди в памяти одного уровня, а также способ представления очередей в виде движения друг за другом по кругу в случае двух очередей. В качестве критериев оптимальности рассмотрены максимальное среднее время работы до переполнения и минимальная доля потерянных элементов при работе на бесконечном времени.

3. Предложены и исследованы математические модели, описывающие способы представления приоритетной очереди с n приоритетами в виде массива и в виде n FIFO-очереди. В качестве критериев оптимальности рассмотрены максимальное среднее время работы до переполнения и минимальная доля потерянных элементов при работе на бесконечном времени.
4. Разработан комплекс программ, реализующих предложенные в работе модели и алгоритмы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Об оптимальном управлении FIFO-очередями на бесконечном времени. // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 401–415.
2. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Оптимальное управление n FIFO-очередями на бесконечном времени. // *Информационно-управляющие системы*. — 2009. — № 6. — С. 401–415.
3. Драц А. В., Соколов А. В. Оптимальное управление приоритетной очередью в памяти одного уровня. // *Труды КарНЦ РАН. Серия математическое моделирование и информационные технологии*. — 2011. — № 2. — С. 103–110.
4. Drac A. V., Sokolov A. V. The linked list representation of n LIFO-stacks and/or FIFO-queues in the single-level memory. // *Information Processing Letters*. — 2013. — no. 13. — Pp. 832–835.
5. Drac A. V., Sokolov A. V. The circular representations of 2 FIFO-queues in single-level memory. // *AIP Conference Proceedings of ICNAAM*. — 2015. — Режим доступа: <http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4912732>.
6. Драц А. В., Соколов А. В. Анализ некоторых методов реализации приоритетной очереди. // *Межвуз. сб. «Стохастическая оптимизация в информатике»*. — 2008. — № 4. — С. 61–71.

7. Драц А. В., Соколов А. В. Анализ некоторых методов размещения в памяти очереди с n приоритетами. // Межвуз. сб. «Стохастическая оптимизация в информатике». — 2009. — № 5. — С. 115–121.
8. Drac A. V., Sokolov A. V. The optimal implementation of n FIFO-queues in single-level memory. // *Proceedings of AMICT 2010-2011 Advances in Methods of Information and Communication Technology*. — 2012. — С. 51–65.
9. Драц А. В., Соколов А. В. Математический анализ процесса работы с M FIFO-очередями // Межвуз. сб. «Стохастическая оптимизация в информатике». — 2012. — Т. 2, № 8. — С. 75–82.
10. Драц А. В., Соколов А. В. Моделирование некоторых методов представления n FIFO-очереди в памяти одного уровня. // *Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления*. — 2014. — Т. 1, № 1. — С. 40–52.
11. Драц А. В., Соколов А. В. Об оптимальном управлении n стеками и/или очередями в памяти одного уровня. // Тезисы докладов VII Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». Обзорение прикладной и промышленной математики. — Т. 2. — Петрозаводск: ТВП, 2008. — С. 744.
12. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Математические модели и методы повышения эффективности и надежности реализации динамических структур данных. // Труды XVI Всероссийской научно-методической конференции «Телематика-2009». — Т. 2. — СПб.: 2009. — С. 420–421.
13. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Некоторые задачи оптимального управления динамическими структурами данных. // Труды Третьей Всероссийской научной конференции «Методы и средства обработки информации». — М.: 2009. — С. 187–192.
14. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Математические модели и методы повышения эффективности и надежности реализации динамических структур данных. // Научные материалы 5-й международной научно-технической конференции «Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта». — Вологда: 2009. — С. 7–10.
15. Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В. Математические модели и методы повышения эффективности алгоритмов динамического распределения памяти. // Материалы международной научно-технической конфе-

- ренции «Многопроцессорные вычислительные и управляющие системы». — с. Дивноморское: 2009. — С. 123–125.
16. *Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В.* Математические модели эффективного управления динамическими структурами данных. // Тезисы докладов международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения». — Минск: 2009. — С. 74–76.
 17. Некоторые задачи оптимального динамического распределения памяти сетевых устройств в распределенных вычислительных системах и вопросы обучения студентов параллельным вычислениям. / Е. А. Аксенова, А. В. Драц, Д. В. Зайцева и др. // Труды Международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи». — М.: 2010. — С. 498–499.
 18. Некоторые задачи оптимального динамического распределения памяти для очередей в распределенных вычислительных системах. / Е. А. Аксенова, А. В. Драц, А. В. Рюгина, А. В. Соколов // Материалы Международной научно-технической конференции «Суперкомпьютерные технологии: разработка, программирование, применение. СКТ-2010». — Т. 2. — с. Дивноморское: 2010. — С. 10–14.
 19. Е. А. Аксенова, А. В. Драц, А. В. Рюгина, А. В. Соколов // Материалы Седьмой международной научной молодежной школы «Высокопроизводительные вычислительные системы ВПВС-2010». — с. Дивноморское: 2010. — С. 245–249.
 20. *Драц А. В., Соколов А. В.* Управление двумя FIFO-очередями в случае их движения друг за другом по кругу. // Сборник докладов 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов». — Петрозаводск: 2011. — С. 315–317.
 21. *Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В.* Некоторые задачи оптимального управления FIFO-очередями. // Труды 5-й Всероссийской конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». — СПб.: 2011. — С. 316–320.
 22. *Drac A. V.* Paged representations of stacks in single-level memory. // Proceedings of Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics. — Petrozavodsk.: 2014. — Pp. 102–103.